Comunicazioni Elettriche
anno accademico 2003-2004

Esercitazione 1

Esercizio 1

Un processo aleatorio a tempo discreto *X(n)* è definito nel seguente modo:
Viene lanciata una moneta. Se il risultato è testa *X(n)*=1 per tutti i valori di *n*, se il risultato è croce *X(n)*= -1 per tutti i valori di *n*.

a. Rappresentare le funzioni campione del processo.
b. Trovare la pmf per *X(n)*.
c. Trovare la pmf congiunta di *X(n)* e *X(n+k)*.
d. Trovare la media e la funzione di autocovarianza di *X(n)*.

Esercizio 2

Siano X e Y due variabili aleatorie *iid* che assumono valori –1 e 2 con probabilita' 2/3 e 1/3, rispettivamente. Si consideri il segnale aleatorio $Z(t) = X\cos(t) + Y\sin(t), \ -\infty < t < \infty$. Mostrare che il processo $Z(t)$ è stazionario in senso lato, ma non stazionario in senso stretto.

Esercizio 3

Si consideri il processo aleatorio $X(t) = e^{-At}$ con $t \geq 0$ e A variabile aleatoria uniforme in $[0, M]$.

(a) Trovare il valore medio $\mu_X(t)$
(b) Trovare $\mu_X(0)$
(c) Calcolare la funzione di autocovarianza.

Esercizio 4

Sia $X(t)$ il processo aleatorio $X(t) = Ag(t)$, con A variabile aleatoria che assume valori +1 e –1 con uguale probabilità e $g(t) = rect(t - 0.5)$. Trovare:

1) la pmf di $X(t)$
2) la media $E[X(t)]$
3) la pmf congiunta di $X(t)$ e $X(t + \tau)$ con $\tau > 0$

Corso di *Comunicazioni Elettriche*
Università di Cassino
Esercizi svolti in classe il 28/1/2004

Esercizio 1
Un processo aleatorio ha le funzioni campione del tipo $X(t)=Y$ dove Y è una variabile aleatoria con pdf uguale a:

$$f_Y(y)=\frac{1}{7}(\delta(y+3)+\delta(y+2)+\delta(y+1)+\delta(y)+\delta(y-1)+\delta(y-23)+\delta(y-3))$$

1) Il processo è continuo o discreto?
2) Trovare $E[X(t)]$.
3) Trovare $E[X^2(t)]$.

Esercizio 2
Sia $X(t)$ il processo aleatorio $X(t)=rect\left[\frac{t}{D}\right]$, con D variabile aleatoria con pdf $f_D(\alpha)=\lambda e^{-\lambda\alpha}u(\alpha)$.

1. *X(t)* è un processo a valori continui o discreti?
2. Trovare distribuzione del primo ordine di $X(t)$
3. Stabilire se $X(t)$ è stazionario in senso stretto
4. Calcolare la media e la funzione di autocorrelazione del processo $X(t)$

Esercizio 3

Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti. Sia X distribuita uniformemente nell'intervallo $(-1,1)$ e sia $E[Y]=2$ e $E[Y^2]=6$. Si consideri il processo aleatorio $V(t)=Ye^{Xt}$. Trovare $E[V(t)]$, $R_v(t_1,t_2)$ e $E[V^2(t)]$.

Esercizio 4
Sia $X(t)$ un processo aleatorio avente caratterizzazione del I ordine:

$$f_{X(t)}(x)=\frac{1}{2}rect\left(\frac{x}{2}\right),$$

e caratterizzazione del II ordine tale che risulti $f_{X(t_1)X(t_2)}(x_1,x_2)=f_{X(t_1)}(x_1)f_{X(t_2)}(x_2), \quad \forall t_1\neq t_2$.
Se $Y(t)=X(t)\cos(2\pi f_0 t)$ è un nuovo processo aleatorio, calcolare:
1) $E[Y(t)]$;
2) $\mathrm{var}(Y(t))$;
3) $R_Y(t,\tau)$.

Esercizio 5

Si consideri il seguente processo aleatorio complesso:

$$X(n) = A(n)e^{j\theta(n)}$$

dove $\theta(n) = \pi B(n)$ ed $A(n)$ e $B(n)$ sono entrambi processi di Bernoulli a valori equiprobabili e statisticamente indipendenti tra loro. Stabilire se $X(n)$ è stazionario in senso lato (SSL).

Esercizio 6

Uno scommettitore vuole contattare la sua agenzia per fare una puntata su una corsa di cavalli. Considerando che il telefono può risultare occupato, egli decide di telefonare una volta ogni 3 minuti. Se la probabilità di trovare occupato è 0.95, indipendentemente dalle altre telefonate che egli fa, determinare il tempo medio che lo scommettitore aspetterà per fare la puntata.

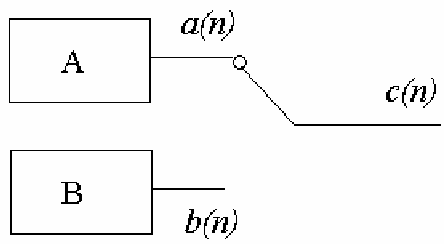
Esercizio 7

La probabilità di fare Jackpot su una *slot-machine* è $0.5 \cdot 10^{-4}$ (le prove si suppongono indipendenti). Supponiamo, per semplicità, che il Jackpot sia l'unica vincita possibile su questa slot-machine. Se 1 gettone costa 1$, e in un mese arrivano esattamente 4000 persone che giocano ognuna 10$ su quella macchina, a quanto deve ammontare il Jackpot perché il gestore guadagni mediamente 15000$ al mese? Qual è la probabilità di vincere con 1000$, se dall'ultimo Jackpot sono stati spesi 10000$ senza vincere?

Corso di *Comunicazioni Elettriche*
Università di Cassino
Esercizi svolti in classe il 18/02/2004

Esercizio 1.

Nel sistema di figura, l'interruttore I si trova commutato (la posizione non varia nel tempo) su A con probabilità p e su B con probabilità $1-p$. Le $a(n)$ sono v.a. *i.i.d.* $B(p_a,1)$ e le $b(n)$ sono v.a. *i.i.d.* $B(p_b,1)$.



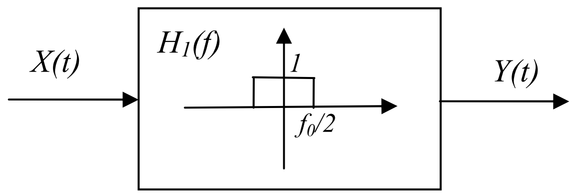
- Valutare la PSD della sequenza $c(n)$;
- dire se $c(n)$ è ergodica per la componente continua.

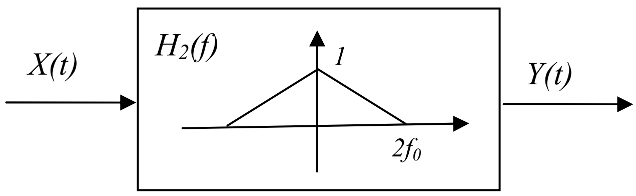
Esercizio 2.

È dato il processo aleatorio

$$X(t) = X_1 \cos(2\pi f_0 t) - X_2 \sin(2\pi f_0 t)$$

dove X_1 e X_2 sono due variabili aleatorie indipendenti Gaussiane a valor medio nullo e varianza $\sigma^2_{X_1} = \sigma^2_{X_2} = 4$. Questo processo è l'ingresso dei due sistemi LTI di figura. Ricavare la densità di probabilità del primo ordine $f_Y(y;t)$ del processo $Y(t)$ nei due casi.





Esercizio 3.

Siano *X(t)* e *Y(t)* processi aleatori congiuntamente stazionari in senso lato e congiuntamente gaussiani, con funzioni di auto e mutua correlazione $R_X(\tau)$, $R_Y(\tau)$ e $R_{XY}(\tau)$ e corrispondenti spettri $S_X(f)$, $S_Y(f)$ e $S_{XY}(f)$.

Sia $Z(t) = X(t)\cos(2\pi f_0 t) + Y(t)\sin(2\pi f_0 t)$ con f_0 costante deterministica.

a) Stabilire se *Z(t)* è un processo aleatorio gaussiano.

b) Trovare la media $\mu_z(t)$ e la funzione di autocorrelazione $R_z(t_1,t_2)$ di $Z(t)$. Stabilire se Z(t) è stazionario in senso lato.

c) Supporre:

$$S_X(f) = S_Y(f) = \begin{cases} A & |f| < f_1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$S_{XY}(f) = \begin{cases} jAf/f_1 & |f| < f_1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

dove $f_1 < f_0$ e $A > 0$ sono costanti deterministiche. Trovare $S_Z(f)$.

Esercizio 4.

Un processo aleatorio Gaussiano SSL a media nulla *X(t),* con spettro di densità di potenza $S_X(f) = 4$, transita nel filtro avente funzione di trasferimento

$$H(f) = 2rect\left[\frac{f-21B/2}{B}\right] + 2rect\left[\frac{f+21B/2}{B}\right]$$

Dal processo aleatorio di uscita dal filtro, *Y(t)*, vengono estratti due campioni temporali $Y_1 = Y(T)$ e $Y_2 = Y(2T)$ con $T = 1/(2B)$. Calcolare la funzione densità di probabilità della variabile aleatoria $Z = Y_1 - Y_2$.

Esercizio 5 (2.46 Proakis)

Mostrare che la trasformata di Hilbert di un segnale pari è dispari e la trasformata di Hilbert di un segnale dispari è pari.

Esercizio 6 (2.59 Proakis)

Sia $m(t) = \text{sinc}^2(t)$ e sia $x(t) = m(t)\cos 2\pi f_0 t - \hat{m}(t)\sin 2\pi f_0 t$ una segnale passabanda.

- Trovare il preinviluppo $z(t)$ e l'equivalente passabasso di $x(t)$
- Determinare e rappresentare graficamente la trasformata di Fourier di $x(t)$. Quale è la banda di $x(t)$?
- Ripetere per $x(t) = m(t)\cos 2\pi f_0 t + \hat{m}(t)\sin 2\pi f_0 t$

Esercizio 7 (2.56 Proakis)

Il segnale passabanda $x(t) = \mathrm{sinc}(t)\cos(2\pi f_0 t)$ passa attraverso il filtro passabanda con risposta impulsiva $h(t) = \mathrm{sinc}^2(t)\sin(2\pi f_0 t)$. Usando gli equivalenti passabasso del segnale in ingrasso e della risposta impulsiva del filtro, trovare l'equivalente passabasso del segnale in uscita e da questo il segnale in uscita $y(t)$.